

关于希尔伯特变换的分析和研究

颜 彪, 杨 娟

(扬州大学 信息工程学院, 江苏 扬州 225009)

摘 要:首先从数学定义上直观地分析希尔伯特变换,接着讨论了离散希尔伯特变换的基本原理,并研究如何利用有限冲激响应滤波器(FIR)设计方案来实现该变换。最后,举例说明希尔伯特变换在数字 I-Q 下变频器中的应用,以便学生更好地掌握这一概念。

关键词:离散希尔伯特变换;正交分解;数字 I-Q 下变频器

中图分类号:TN911.7

文献标识码:A

文章编号:1008-0686(2004)05-0027-04

Analysis and Research on Hilbert Transform

YAN Biao, YANG Juan

(Institute of Information Technology, Yangzhou University, Yangzhou 225009, China)

Abstract: Since discrete Hilbert transform can produce I-Q channels with high balance, it has been broadly applied in many systems which demand using signal orthogonal decomposition technique, including communications, radar, voice processing and so on. This paper analyzes Hilbert transform from the mathematics definition at first, and then discusses the basic principle of discrete Hilbert transform and studies how to implement the transform by using FIR filter design scheme. Finally, the application of discrete Hilbert transform in digital I-Q frequency down-converter is showed by giving a example in order that students have a good grasp of the concept.

Keywords: discrete Hilbert transform; orthogonal decomposition technique; digital I-Q frequency down-converter

0 引言

在通信系统中,经常需要对一个信号进行正交分解,即分解为同相分量和正交分量。由于希尔伯特(Hilbert)变换可以提供 90° 的相位变化而不影响频谱分量的幅度,即对信号进行希尔伯特变换就相当于对该信号进行正交移相,使它成为自身的正交对。因此,希尔伯特变换在通信领域获得了广泛应用。

由于希尔伯特变换的概念相对比较复杂,学生不易理解和掌握这一知识要点,因而不能将它灵活运用于工程设计。针对这一问题,本文先从数学定义上直观地分析希尔伯特变换,再讨论如何利用有限

冲激响应滤波器(FIR)设计方案来实现离散希尔伯特变换,然后举例说明其在数字 I-Q 下变频器中的应用,以加深学生对希尔伯特变换概念的理解。

1 希尔伯特变换

函数 $x(t)$ 的希尔伯特变换被定义为 $x(t)$ 与函数 $h(t) = 1/\pi t$ 的卷积,这可以表示为

$$H[x(t)] \equiv x^h(t) = x(t) * h(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (1)$$

式中: $*$ 表示卷积; $H[x(t)]$ 和 $x^h(t)$ 表示时域中的一个希尔伯特变换。与信号分析其它变换不同的是,

时域函数的希尔伯特变换仍然在时域内。在频域中, 希尔伯特变换可表示为

$$X^h(f) = X(f)H(f) \quad (2)$$

由于 $h(t)$ 的傅里叶变换

$$F[h(t)] \equiv H(f) = -j \operatorname{sgn}(f) = -j \begin{cases} 1, & f > 0 \\ -1, & f < 0 \end{cases}$$

(sgn 为符号函数)

所以, 只要将 $X(f)$ 的负频率乘以 j , 而正频率乘以 $-j$, 即可得频域内的希尔伯特变换^[1]。

希尔伯特变换的结果也可以从傅里叶反变换中获得, 即

$$x^h(t) = x(t) * h(t) = F^{-1}[X(f)H(f)] \quad (3)$$

当输入信号 $x(t) = \sin(2\pi f_i t)$ 时, 其傅里叶变换 $X(f) = j/2[\delta(f+f_i) - \delta(f-f_i)]$, 将其负频率部分乘以 j , 而正频率部分乘以 $-j$, 则得

$$X^h(f) = \frac{1}{2}[-\delta(f+f_i) - \delta(f-f_i)] = F[-\cos(2\pi f_i t)] \quad (4)$$

对上式两边同时取傅里叶反变换, 可得

$$H[\sin(2\pi f_i t)] = -\cos(2\pi f_i t) \quad (5)$$

上式表明, 正弦函数的希尔伯特变换就是负的余弦函数, 结果是将输入信号移相了 $-j$ 。同理, 如输入信号是余弦函数, 则其希尔伯特变换为正弦函数, 结果也移相了 $-j$ 。因此, 希尔伯特变换可以提供 90° 的相位变化而不影响频谱分量的幅度大小。

2 离散希尔伯特变换

2.1 基本原理

函数 $H(f)$ 在频域内从 $-\infty$ 一直延伸到 $+\infty$, 而在离散域中, 数据的点数必须有限 (例如为 $2M+1$ 点)。对输入信号进行数字化并取其点数为有限值, 这相当于给输入信号加了一个窗, 用一个有限冲激响应滤波器 FIR 就可以实现近似理想的希尔伯特变换^[2]。 $h(nt_s)$ 的 z 变换为

$$H(z) = \sum_{n=-M}^M h(nt_s) z^{-n}$$

或

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nt_s) z^{-n} \quad (6)$$

这两个表示式的计算求和均从负值开始, 因此它们都是非因果关系, 但可以利用时域内的一个简单变换使其成为因果关系。观察式(6)可知, n 值是从 $-M$ 到 M 进行加窗的, 所采用的时域变换相当于将

其第一个结果乘以 z^{-M} , 并代入 $k=n+M$, 得到

$$H(z) = \sum_{n=-M}^M h(nT) z^{-(n+M)} = \sum_{k=0}^{2M} h[(k-M)T] z^{-k} \quad (7)$$

式中, k 值从 0 开始, 故是因果关系。

将函数 $h(nt_s)$ 的 z 变换表示为

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nt_s) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} h(nt_s) z^{-n} + h(0) + \sum_{n=1}^{\infty} h(nt_s) z^{-n} = h(0) + \sum_{n=1}^{\infty} [h(-nt_s) z^n + h(nt_s) z^{-n}] \quad (8)$$

式中, 设 $z = \exp(j2\pi f_i t_s)$, 得

$$H(e^{j2\pi f_i t_s}) \equiv H_r(e^{j2\pi f_i t_s}) + jH_i(e^{j2\pi f_i t_s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nt_s) e^{-2\pi n f_i t_s} = h(0) + \sum_{n=1}^{\infty} [h(-nt_s) \cos(2\pi n f_i t_s) + jh(-nt_s) \sin(2\pi n f_i t_s) + h(nt_s) \cos(2\pi n f_i t_s) - jh(nt_s) \sin(2\pi n f_i t_s)] \quad (9)$$

式中:

$$H_r(e^{j2\pi f_i t_s}) = h(0) + \sum_{n=1}^{\infty} [h(-nt_s) + h(nt_s)] \cos(2\pi n f_i t_s) \quad (10)$$

$$H_i(e^{j2\pi f_i t_s}) = \sum_{n=1}^{\infty} [h(-nt_s) - h(nt_s)] \sin(2\pi n f_i t_s) \quad (11)$$

当采样频率为 f_s 时, 传输函数 $H(f)$ 被限制为 $f_s/2$ 宽带。由于采样的周期特性, 希尔伯特传输函数可以用傅里叶级数形式表示为

$$H_i(e^{j2\pi f_i t_s}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f_i t_s) \quad (12)$$

其中

$$b_n = \frac{2}{f_s} \int_{-f_s/2}^{f_s/2} H_i(e^{j2\pi f t_s}) \sin(2\pi n f t_s) df = \frac{2}{f_s} \left[\int_{-f_s/2}^0 \sin(2\pi n f t_s) df + \int_0^{f_s/2} -\sin(2\pi n f t_s) df \right] = \frac{1}{n\pi} [-2 + 2\cos(n\pi)] = \begin{cases} 0 & n \text{ 为偶数} \\ -\frac{4}{n\pi} & n \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (13)$$

上式中利用了关系式 $f_s t_s = 1$ 。

从式(10)中可以看到, 如果满足条件

$$h(0) = 0 \quad h(-nt_s) = -h(nt_s) \quad (14)$$

则代表希尔伯特变换的传输函数只含有虚部,因此, $H_1 f=0$,而 $H_1 f \neq 0$,由此可写出式(11)中的 H_1 为

$$H_1(e^{j2\pi n f t_s}) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} h(nt_s) \sin(2\pi n f t_s) \quad (15)$$

将上式与式(12)进行比较,得到

$$h(nt_s) = -b_n/2 \quad (16)$$

再利用这一关系以及式(13),则可求得

$$h(nt_s) = \begin{cases} 0 & (n \text{ 为偶数}) \\ \frac{2}{n\pi} & (n \text{ 为奇数}) \end{cases} \quad (17)$$

$$h(-nt_s) = \begin{cases} 0 & (n \text{ 为偶数}) \\ -\frac{2}{n\pi} & (n \text{ 为奇数}) \end{cases} \quad (18)$$

2.2 设计举例

FIR 滤波器设计方法有窗口法、频率采样法和极小化极大误差法(最优法)等。在数字信号处理中设计希尔伯特滤波器时,通常采用窗口法来设计^[3]。

以下的例子采用 FIR 滤波器加矩形窗来实现希尔伯特变换。现选择一个有 11 段时延的滤波器,即相当于 $2M+1=11$,相应的 n 取值是从 -5 到 5。按照式(7)的要求,通过把 n 取值重置为 0 到 10 来将 $h(nt_s)$ 转化为因果形式,其结果如表 1 所示。由于 n 为偶数时, $h(n)$ 为 0,所以当 n 取值 -6 到 6 时,仍可得相同结果。

表 1 标准 $h(n)$ 值

n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$h(n)$	$-\frac{2}{5}\pi$	0	$-\frac{2}{3}\pi$	0	$-\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{2}{3}\pi$	0	$\frac{2}{5}\pi$
重新设置的 n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

所得滤波器的直接形式如图 1 所示,其中 τ 表示单位时间延迟。从图 1 中看到,共有 6 个不同的 $h(n)$ 值,但每一个值之间都具有 2 个单位的时间延迟。如果滤波器的输入是正弦波,则输出为输入信号与 $h(n)$ 的卷积。

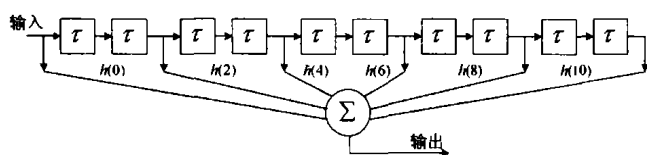
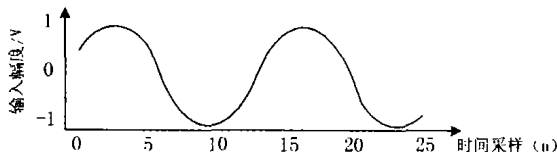


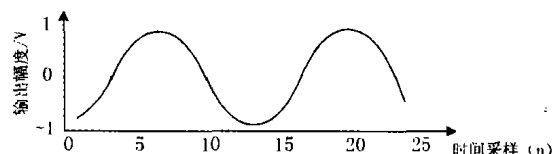
图 1 用于希尔伯特变换的滤波器的直接形式

一般情况下,如果输入一个 n 点的脉冲数据,且滤波器有 m 点数据,则滤波器的输出将会有 $n+m-1$ 点数据,其中有 $n-m$ 点数据是稳态的^[1]。在本例中,由于该滤波器有 10 个单位的延迟,所以其输

出需要经过 10 个时间单位后才能达到稳定。另外,最后的 10 个输出也是不正确的,因为一部分输入数据已经为 0。希尔伯特变换滤波器的输入、输出信号分别如图 2 中(a)、(b)所示。



(a) 输入信号



(b) 输出信号

图 2 希尔伯特变换滤波器的输入与输出信号

3 在数字 I-Q 下变频器中的应用

在通信系统中,人们提出利用数字方式产生具有高平衡度 I-Q 信道的方法。在该方法中,I 信道的数据从单信道的下变频器得到,Q 信道的数据通过对 I 信道的数据进行处理产生,从而把 I-Q 信道输出之间的不平衡度保持在最低限度。

以数字 I-Q 下变频器为例,通过对数字化后的输入信号进行快速傅里叶变换(FFT)以确定 $X(f)$,其时域希尔伯特变换 $x^h(t)$ 是利用对 $H(f)$ 的定义,并通过 FFT 反变换来获得。当采用窗口法来设计时,其冲激响应为

$$h(n) = \frac{1}{\pi(n - M/2)} [1 - (-1)^{n-M/2}] \times \omega(n - M/2) \quad (19)$$

式中, $\omega(n)$ 为窗函数, M 为滤波器阶数。

此外,输入信号经过希尔伯特滤波器时会产生 $M/2$ 的延迟。

基于希尔伯特变换的数字 I-Q 下变频器的结构如图 3 所示。

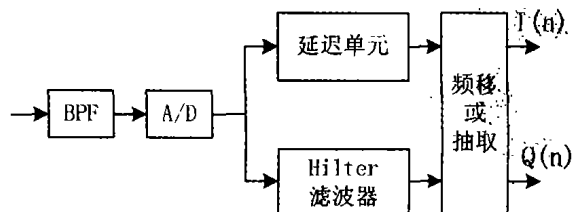


图 3 基于希尔伯特变换的数字 I-Q 下变频器结构图

(下转第 48 页)

(10,20,30,40,50),结果如图2所示。其中 x_{in} 即 $x(n)$,按照 $x(0),x(3),x(4),x(2),x(1)$ 的顺序输入。 y_{real} 和 y_{imag} 分别为 $X(k)$ 的实部和虚部,按照 $X(1),X(2),X(4),X(3),X(0)$ 的顺序输出。需要说明的是在 Maxplus II 中负数是以补码的形式

显示的,即2023实为-25,2013为-35,2039为-9,故由仿真结果可得 $X(k)=(150,-25+j34,-25+j8,-25-j9,-25-j35)$,这与按 $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$ 进行手工计算所得结果是完全一致的。

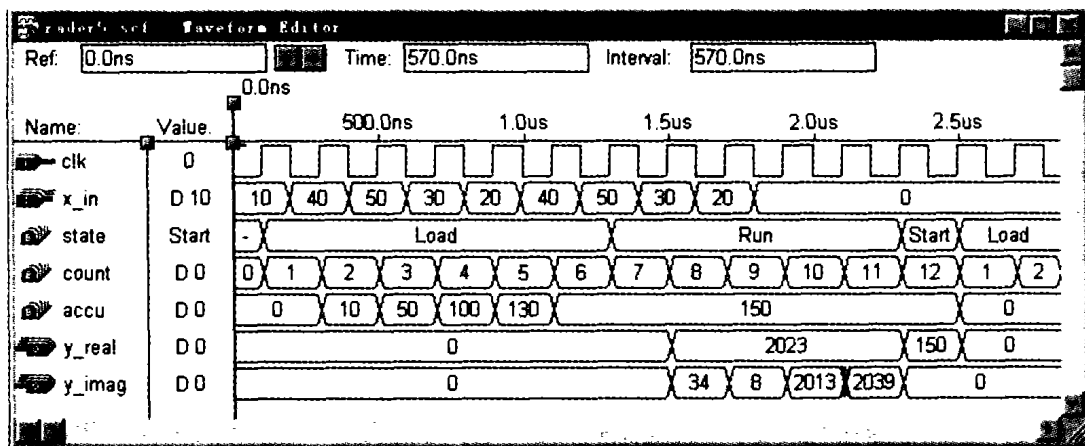


图2 仿真结果

4 结论

综上所述可以得到如下结论:(1)原根是成对存在的,即若 g 为 m 的原根,则其逆元 q 亦为 m 的原根。(2)利用原根可将数环重新排序,将此理论用于 DFT,可推导出 DFT 的循环卷积算法,将该算法用 VHDL 语言实现并将程序下载至 FPGA 中,其意义在于可用 FPGA 实现 DSP 的重要内容之一——

DFT 运算,而 FPGA 实现 DSP 的优势在于速度快。

参考文献:

- [1] Uwe Meyer-Baese 著. 数字信号处理的 FPGA 实现(刘凌等译)[M]. 北京:清华大学出版社,2003
- [2] 裴定一,祝跃飞. 算法数论[M]. 北京:科学出版社,2002
- [3] 胡广书. DFT 和卷积的快速算法[M]. 清华大学电机工程与应用电子技术系讲义,1993

(上接第29页颜彪等文)

中频信号首先被直接采样,然后分成上下两路,一路信号经过希尔伯特变换网络,另一路信号经过延迟单元(以保证信号的同步),从而得到一对正交数字信号。该方法的数字化程度较高,易于用 FPGA 器件实现^[4]。实际应用中,希尔伯特变换通常采用半带滤波器(Half-Band Filter, HBF)和级联积分梳状滤波器(Cascaded Integrator-Comb Filter, CICF)来实现。

4 结束语

希尔伯特变换可以提供90°的相位变化而不影响频谱分量的幅度大小,如果采用数字方式,即离散希尔伯特变换则可产生具有高平衡度 I-Q 信道,因此,它被广泛应用于通信、雷达、语音处理、数字化

医学超声成像等这类需要用到信号正交分解技术的系统中。本文分别从希尔伯特变换的定义、实现及其应用等方面进行了详细阐述,希望能给电子通信专业的学生或有关技术人员提供帮助。

参考文献:

- [1] James Tsui 著. 宽带数字接收机[M]. 杨小牛,陆安南,金飏译,北京:电子工业出版社,200:174-180
- [2] 何正权,何旭. 多次采样与希尔伯特变换[J]. 成都:电子科技大学学报,1997,26(5):504-510
- [3] 李晶晶,江桦,王明坤. 希尔伯特变换在信号解调中的应用[J]. 郑州:信息工程大学学报,2002,3(4):29-31
- [4] 黄英,李景文,刘敏. 软件无线电技术在中频接收机中的应用[J]. 北京:无线电通信技术,2004,30(1):18-20